

TEORIA GENERALE
DELLE
EQUAZIONI,

IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE

LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE
EQUAZIONI GENERALI DI GRADO
SUPERIORE AL QUARTO

DI

PAOLO RUFFINI.

P A R T E P R I M A.

BOLOGNA MDCCXCVIII.

NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.

TEORIA DELLE EQUAZIONI.

CAPO PRIMO.

Delle Funzioni in generale.

1. Col nome di *Funzione* di una, o più variabili intendiamo un'Espressione analitica qualsivoglia, in cui essa, od esse si contengono sole, o congiunte a delle quantità costanti; così $5x^2$, $6ax - b$ saranno due Funzioni, la prima della variabile x , la seconda della z ; ed $ax^3 - \frac{b^5}{z}$ sarà una Funzione di amendue le variabili x, z .

2. Affine d'indicare in generale una funzione qualunque di una, o più variabili, siamo soliti servirci della lettera f , e della parentesi; così $f(x)$ significa una qualunque funzione della x ; $f(x)(y)$ ne esprime una qualsivoglia delle x, y ; e $f(x)(y)(z)$ una delle x, y, z .

3. Considerando però le diverse funzioni particolari siamo soliti nell'accennarle servirci in diverse maniere della parentesi. Imperciocchè 1.º, o la Funzione cangia di valore per la permutazione fra loro delle variabili in essa contenute, come succede nella funzione $ax^3 - \frac{b^5}{z}$, il valore della

a

qua-

CAPO SECONDO.

Proprietà generali delle Equazioni.

17. Sappiamo già dall' Algebra, cosa intender si debba col nome di **Equazione Algebrica** determinata, e quali siano quelle quantità, che diconsi sue **radici**. Venga ora proposta con l' incognita x una simile Equazione, e sia questa per esempio la

$$\frac{ax^4}{m} - \frac{bx^3}{n} - cx + \frac{dx^2}{p} + f = \frac{gx^4}{m} - \frac{ex^3}{n} + gx + \frac{b}{np}$$

Tolte in essa le frazioni, trasporto tutti i suoi termini nel primo Membro, e venendone

$$(anp - gmn)x^4 + (ep - bmp)x^3 + dmnx^2 -$$

$$(cmnp + gmp)x + (fmnp - bm) = 0, \text{ suppongo}$$

$$(anp - gmn) = F$$

$$(ep - bmn) = G$$

$$dmn = H$$

$$-(cmnp + gmp) = I$$

$$(fmnp - bm) = K,$$

avremo da ciò l' Equazione

$$Fx^4 + Gx^3 + Hx^2 + Ix + K = 0,$$

la quale altro non è, che la proposta avente tutti i suoi termini intieri, ordinati, e collocati nel primo Membro. Ora ciò, che si è detto della precedente Equazione di quarto grado, dicesi egualmente di una qualsivoglia Equazione Algebrica di un grado m , rappresentando m un numero intero, e positivo qualunque. Dunque una tale Equazione

zione potrà sempre ridursi nel modo istesso alla forma

$$(C) \quad F x^m + G x^{m-1} + H x^{m-2} + I x^{m-3} + \text{ec.}$$

+ Z = 0, ove i coefficienti F, G, H, ec., sono tutti Numeri intieri. Dividiamo presentemente que-

sta per F, e avutone il risultato $x^m + \frac{G}{F} x^{m-1} +$

$$\frac{H}{F} x^{m-2} + \frac{I}{F} x^{m-3} + \text{ec.} + \frac{Z}{F} = 0, \text{ suppon-}$$

$$\text{ghiamo } \frac{G}{F} = A, \frac{H}{F} = B, \frac{I}{F} = C, \text{ ec. } \frac{Z}{F} = V, \text{ sos-}$$

tituisco, e ne verrà l' Equazione .

$$(D) \quad x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} + \text{ec.}$$

$$+ L x^{m-(k+1)} + M x^{m-k} + \text{ec.} + R x^3 + S x^2 + T x$$

+ V = 0, chiamati V, T x, S x², ec. gli ultimi suoi termini, ed espresso per M x^{m-k} un qualunque termine di essa, e per L x^{m-(k+1)} quello, che a questo precede. Essa non sarà altro, che la (C) medesima; ma sì l' una, che l' altra di queste Equazioni deriva da una qualsivoglia Equazione Algebrica determinata di un grado qualunque; dunque sì all' una, che all' altra potrà darsi il nome di *Equazione Algebrica Determinata Generale*; e da entrambe egualmente, attribuendo all' esponente m, ed ai Coefficienti gli opportuni valori, potremo ricavare le diverse particolari Equazioni Algebriche determinate, avvertendo, che i Coefficienti della prima si possono bensì supporre tanti Numeri intieri, ma non già così quelli della seconda.

18. Poichè possono esistere diverse radici di

una

una Equazione data, ossia diverse quantità reali, od immaginarie, le quali poste in essa in luogo della x la facciano verificare, supponghiamo di rappresentare con le lettere $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \text{ec.}$ le radici tutte della (C); cosicchè fuori di esse non abbavi alcun' altra quantità capace di rendere zero con la sostituzione il primo Membro di questa Equazione. Ciò presupposto, prendiamo il primo Membro della (C), senza farlo uguale allo zero, e chiamatolo Y , consideriamo in essa la x , come variabile. Avremo così la Funzione $Y = Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + Ix^{m-3} + \text{ec.} + Z$, ove attribuendo diversi valori alla x , è chiaro che ne verranno diversi risultati, e quando giungiamo a fare $x = \alpha, x = \beta, x = \gamma, \text{ec.}$, la Y diverrà sempre, e solamente in tali casi $= 0$.

19. Sia per es. $m = 3, F = 5, G = -15, H = -50, I = 120$, onde la (C) riducasi alla $5x^3 - 15x^2 - 50x + 120 = 0$, Equazione, di cui tutte le radici sono i Numeri, 2, 4, -3. Supponghiamo, come precedentemente, $Y = 5x^3 - 15x^2 - 50x + 120$.

Facendo quivi $x = 1$, otterremo $Y = 5 - 15 - 50 + 120 = 60$; facendo $x = 3$, otterremo $Y = 5 \cdot 27 - 15 \cdot 9 - 50 \cdot 3 + 120 = 30$; e così di seguito, ma mentre supponghiamo $x = 2$, oppure $x = 4$, oppure $x = -3$, sempre ci risulta $Y = 0$: e ci risulta tale soltanto in questi casi.

20. Ritenute le precedenti supposizioni, e sottratta dalla variabile x ciascuna delle radici $\alpha,$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ec. ω , onde avere i binomj $x - \alpha, x - \beta, x - \gamma, x - \delta$, ec. $x - \omega$, io dico che qualunque siasi la x avremo la funzione Y eguale ad un prodotto della forma $F(x - \alpha)^a (x - \beta)^b (x - \gamma)^c (x - \delta)^d \dots (x - \omega)^e$, essendo F il coefficiente del primo termine in Y , ed essendo a, b, c, d , ec. e tutti Numeri intieri, e positivi, de' quali la somma è $= m$.

Suppongo $x - \alpha = r, x - \beta = s, x - \gamma = t$, ec. $x - \omega = z$, e ciò fatto, poichè la Y diventa sempre zero, allorchè facciasi $x = \alpha$, ovvero $x = \beta$, oppure $x = \gamma$ ec., e però mentre si supponga $x - \alpha = 0$, od $x - \beta = 0$, od $x - \gamma = 0$, ec., ossia $r = 0$, od $s = 0$, oppure $t = 0$ ec., ne viene dal (N.º 11) che dovrà la nostra Y essere $= f(r)(s) \dots (z)$. Ma questa per l'Ipotesi essendo una funzione intiera, e razionale della x (N.º 17, 18), viene appunto ad essere una funzione delle r, s, t , ec., come quelle dei (N.º 12, 15); dunque per quanto si è colà dimostrato, dovrà essere $Y = M r^a s^b t^c \dots z^e$ (N.º 16), esprimendo con le lettere a, b, c , ec. e tanti numeri intieri, e positivi; e però avremo $Y = M(x - \alpha)^a (x - \beta)^b (x - \gamma)^c \dots (x - \omega)^e$.

Ora in Y il numero m è il massimo esponente della x , e frattanto è chiaro, che essendo $r = x - \alpha, s = x - \beta, t = x - \gamma$, ec., la massima dimensione delle r, s, t , ec. non può che essere la massima dimensione della x . Dunque pel (N.º 16) sarà $a + b + c + \text{ec.} = m$.

Fi.

Finalmente supponghiamo $x = \frac{1}{u}$; sostituendo

$$\text{nella } Y = Fx^m + Gx^{m-1} + Hx^{m-2} + Ix^{m-3} + \text{ec.} \\ = M(x-\alpha)^a(x-\beta)^b(x-\gamma)^c \dots (x-\omega)^e, \text{ ot-} \\ \text{terremo } \frac{F}{u^m} + \frac{G}{u^{m-1}} + \frac{H}{u^{m-2}} + \frac{I}{u^{m-3}} + \text{ec.}$$

$$= M \left(\frac{1}{u} - \alpha \right)^a \left(\frac{1}{u} - \beta \right)^b \left(\frac{1}{u} - \gamma \right)^c \dots \left(\frac{1}{u} - \omega \right)^e.$$

Ma a cagione di $m = a + b + c + \text{ec.} + e$ abbiamo

$u^m = u^{a+b+c+d+\text{ec.}+e} = u^a u^b u^c u^d \dots u^e$. Dun-
que moltiplicando il primo Membro dell' Equazione
ottenuta per u^m , ed il secondo per $u^a u^b u^c \dots u^e$
fattore per fattore, otterremo $F + Gu + Hu^2$
 $+ Iu^3 + \text{ec.} = M(1 - \alpha u)^a (1 - \beta u)^b \dots$
Ora la precedente Equazione $Fx^m + Gx^{m-1} + \text{ec.}$
 $= M(x - \alpha)^a (x - \beta)^b \dots (x - \omega)^e$ si verifica
sempre qualunque siasi la x , dunque anche quest'
ultima dovrà sempre verificarsi, qualunque siasi
la u , e però ancora, quando facciasi la $u = 0$.
Eseguendo pertanto quest' ultima supposizione,
avremo $F = M \times 1 \times 1 \times 1 \dots \times 1$, e quindi $M = F$.
Sostituisco adunque questo valore in luogo della
 M , e risultandone $Y = F(x - \alpha)^a (x - \beta)^b (x - \gamma)^c$
 $\dots (x - \omega)^e$, ne siegue, che ec.

21. Pel (N.º prec.) avendosi $Fx^m + Gx^{m-1}$
 $+ Hx^{m-2} + \text{ec.} = F(x - \alpha)^a (x - \beta)^b (x - \gamma)^c$
 $\dots (x - \omega)^e$, se dividerò per F , ne verrà

$$x^m + \frac{G}{F} x^{m-1} + \frac{H}{F} x^{m-2} + \text{ec.} = (x - \alpha)^a (x - \beta)^b$$

$$(x - \gamma)^c$$